Dodatek A

Własności macierzy sąsiedztwa grafów prostych

Na początek przypomnijmy, że macierzą sąsiedztwa $A = (a_{ij})_{N\times N}$ grafu prostego o N wierzchołkach nazywamy macierz kwadratową, w której element $a_{ij} = 1$, gdy istnieje krawędź między wierzchołkami i oraz j, zaś $a_{ij} = 0$ w przeciwnym wypadku. Zwróćmy uwagę, że w macierzy sąsiedztwa grafu prostego, który nie ma pętli ani krawędzi wielokrotnych, $a_{ii} = 0$ dla każdego i. Macierz sąsiedztwa grafu prostego ma wiele interesujących własności, m.in.:

- Jest symetryczna, tzn. $a_{ij} = a_{ji}$ dla każdej pary i oraz j.
- Suma wszystkich elementów w i-tym wierszu (jak również w i-tej kolumnie) jest stopniem wierzchołka i, czyli $k_i = \sum_{j=1}^{N} a_{ij} = \sum_{j=1}^{N} a_{ji}$.
- Element $(a^x)_{ij}$ macierzy A^x jest równy liczbie różnych dróg o długości x pomiędzy wierzchołkami i oraz j.

Ostatnią z wymienionych własności udowodnijmy metodą indukcji matematycznej.

1. Przypadek $x = 1$ jest trywialny.
2. Rozpatrujemy drogi o długości $x = 2$ pomiędzy i oraz j. Drogi takie muszą przechodzić przez wierzchołek v sąsiadujący równocześnie z obydwoma wierzchołkami, to znaczy $a_{iv} = a_{vj} = 1$ oraz $a_{iv}a_{vj} = 1$. Jeśli wierzchołek v sąsiaduje tylko z jednym wierzchołkiem i lub j albo nie sąsiaduje z żadnym z nich, to $a_{iv}a_{vj} = 0$. Wynika stąd, że liczba różnych dróg o długości $x = 2$, którymi można dotrzeć z i do j, wynosi $\sum_{v=1}^{N} a_{iv}a_{vj}$ i jest równa elementowi $(a^2)_{ij}$ macierzy $A^2 = A \times A$.
3. Niech $(a^{x-1})_{iv}$, element iv macierzy $A^{(x-1)}$, oznacza liczbę wszystkich dróg o długości $(x - 1)$ z wierzchołka i do wierzchołka v. Jeśli wierzchołek v jest pierwszym sąsiadem wierzchołka j, to $a_{vj} = 1$, w przeciwnym wypadku

$a_{vj} = 0$. Wynika stąd, że $\sum_{v=1}^{N} (a^{x-1})_{iv} a_{vj} = (a^x)_{ij}$ oznacza liczbę dróg o długości x pomiędzy i oraz j, co kończy dowód.

Powyżej omówiona własność macierzy sąsiedztwa umożliwia nam przedstawienie w elegancki sposób kilku kolejnych własności grafów prostych:

- Całkowity stopień grafu, $K = \sum_i k_i$, wynosi

$$K = 2E = \sum_{ij} a_{ij} = \sum_i (a^2)_{ii} \equiv \mathrm{Tr}\ A^2, \tag{A.1}$$

  gdzie $\mathrm{Tr}\ A \equiv \sum_i a_{ii}$ jest śladem macierzy.
- Całkowita liczba pętli o długości 3 w grafie (czyli trójkątów) wynosi

$$N_3 = \frac{1}{6} \sum_i (a^3)_{ii} \equiv \mathrm{Tr} A^3. \tag{A.2}$$

- Całkowita liczba połączonych trójek wierzchołków (czyli dróg o długości 2) wynosi

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} (a^2)_{ij} = \frac{1}{2} \sum_i k_i (k_i - 1). \tag{A.3}$$

- Współczynnik gronowania grafu prostego (2.14) jest zatem opisany wzorem

$$C = \frac{1}{9} \frac{\sum_i (a^3)_{ii}}{\sum_{i \neq j} (a^2)_{ij}}. \tag{A.4}$$

- Odległość $d(i, j)$ między wierzchołkami i oraz j jest najmniejszą liczbą x, dla której element $(a^x)_{ij}$ macierzy A^x jest różny od zera

$$d(i, j) = \min \{x : (a^x)_{ij} \neq 0\}. \tag{A.5}$$